

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) / Γ' ΕΠΑΛ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	18/10/2025

### ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΜΑ Α

**A<sub>1</sub>**. Πότε μια συνάρτηση  $f(x)$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

(Μονάδες 5)

**A<sub>2</sub>**. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$  ;

(Μονάδες 5)

**A<sub>3</sub>**. Πότε μια συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

**A<sub>4</sub>**. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ , θα είναι η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  και εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x = x_0$ .

**β.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ , όπου  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$ .

**γ.** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(\alpha, \beta)$  με  $\alpha \neq \beta$ , όταν ισχύει  $f(\beta) = \alpha$ .

**δ.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , τότε θα ισχύει:

$$f\left(\frac{2}{2025}\right) > f\left(\frac{2}{2026}\right).$$

**ε.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , για  $x_0 \in A$ , όπου  $A$  το πεδίο ορισμού της, τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-8x+15}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-x-2}$ .

**B<sub>1</sub>**. Να βρείτε τα πεδία ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.

(Μονάδες 4 + 4 = 8)

**B<sub>2</sub>**. Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .

(Μονάδες 4 + 4 = 8)

**B<sub>3</sub>**. Αν  $A = (-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$  και  $B = [-2, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ , να βρείτε τις τιμές του x (αν υπάρχουν) για τις οποίες η γραφική παράσταση :

- (i) της g τέμνει τον άξονα x'x
- (ii) της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση  $y = 3$ .

(Μονάδες 4 + 5 = 9)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x}, & x \neq 3, x \neq 0 \\ 3\lambda^2 - 11, & x = 3 \end{cases}$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

(Μονάδες 5)

**Γ<sub>2</sub>**. Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ .

(Μονάδες 7)

Για  $\lambda = -2$ ,

**Γ<sub>3</sub>**. Να υπολογίσετε το όριο  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{10(\sqrt{4x+5}-5)}{x-5}$

(Μονάδες 7)

Γ<sub>4</sub>. Να βρεθεί το  $\beta \in \mathbb{R}$ , αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \beta x^2 + \lambda^2 x - \alpha$  διέρχεται από το σημείο  $K(f(3), 3)$ , όπου  $\alpha$  η τιμή του ορίου στο υποερώτημα Γ<sub>3</sub>.

(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + \kappa - 11$ , με  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , όπου

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 9}{x - 1}.$$

Δ<sub>1</sub>. Να βρεθεί η τιμή του  $\kappa$ .

(Μονάδες 5)

Για  $\kappa = 14$ ,

Δ<sub>2</sub>. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  για  $x = 0$ .

(Μονάδες 6)

Αν  $f'(0) = -4$ ,

Δ<sub>3</sub>. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$ , καθώς και το σημείο που η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6 + 2 = 8)

Δ<sub>4</sub>. Να προσδιοριστεί η τιμή του  $\beta \in \mathbb{R}$  για την οποία η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 12, & x \neq -3 \\ x + 3, & x = -3 \\ f'(0) + \beta, & x = -3 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο σημείο } x_0 = -3.$$

(Μονάδες 6)